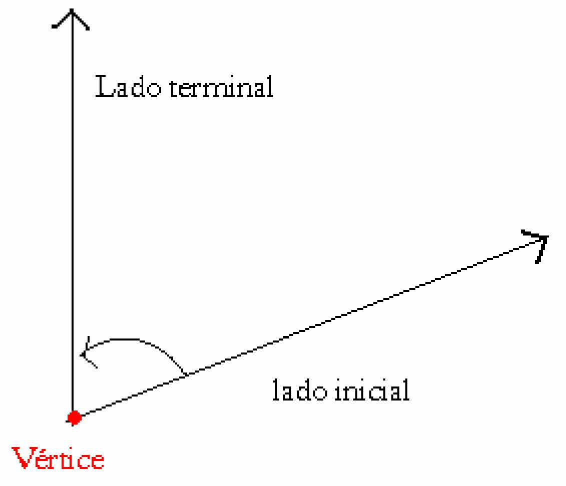
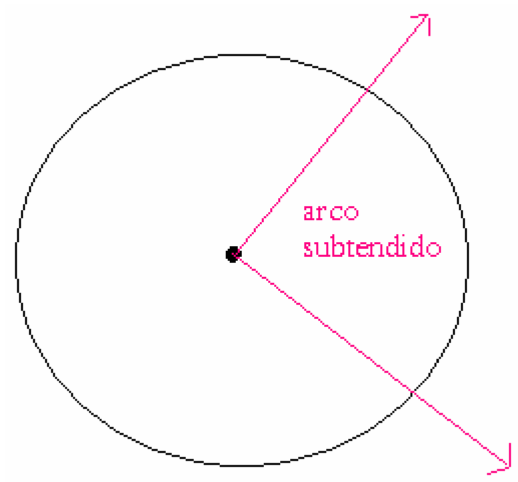
Trigonometría

Angulo y sus Medidas

En adelante, concebiremos por ángulo a una figura plana que consiste en dos semirrectas con sus puntos extremos en común. Este punto extremo común es el vértice del ángulo y las semirectas sus lados.



Consideraremos un círculo de radio cualquiera cuyo centro es el vértice del ángulo. A este ángulo lo llamaremos ángulo central del círculo y la porción de la circunferencia que queda entre los lados del ángulo la llamaremos arco subtendido por el ángulo.



1.1 Unidades de medida de un ángulo

1.1.1 Grado Sexagesimal

Si la longitud del arco subtendido por el ángulo es de $\frac{1}{360}$ de la circunferencia del círculo, entonces la medida es 1 grado sexagesimal, lo que se denota por 1°.

Un grado se divide a su vez en un minuto, es decir, 1° = 60'

Un minuto se divide a su vez en 60 segundos, es decir, 1' = 60''

1.1.2 Radián

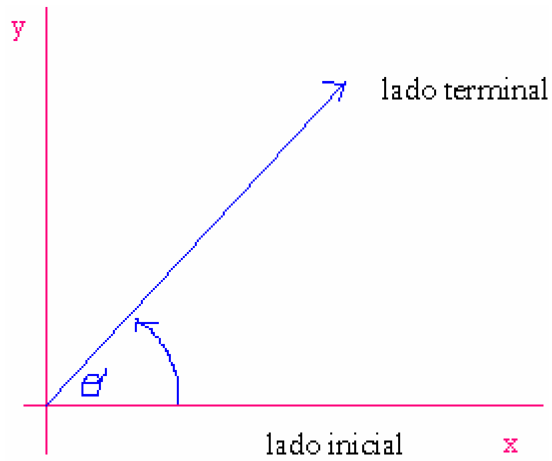
Un ángulo que tiene medida 1 radián si este subtiende un arco de longitud igual al radio del círculo. El ángulo completo tiene medida 2π radianes.

1.1.3 Medida en grados y radianes de algunos ángulos

radián	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
grados	0	30	45	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360

1.1.4 Ángulos en posición Standard

Tomaremos el plano cartesiano; y el vértice será el origen y uno de sus lados sobre el eje positivo de las x (lado inicial) y el otro lado (lado terminal). Esta posición de un ángulo se conoce como posición Standard.

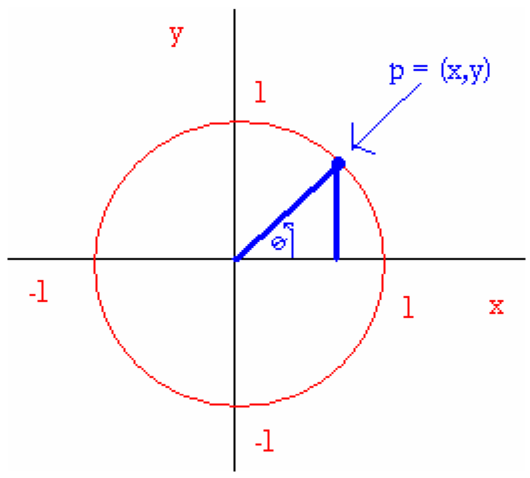


Debido que a veces es necesario distinguir las orientaciones de la rotación, se dice que es positiva si la orientación es en sentido contrario a las manecillas del reloj. De lo contrario, se dice que la orientación es negativa.

Ejercicios
Dibuje un ángulo de 120°, -150°, 960°.

1.2 Funciones Trigonométricas

Consideremos un punto p en la circunferencia unitaria (en coordenadas cartesianas centradas en el origen)



La posición de p está completamente determinada por el ángulo, que se forma en el origen. Es obvio que el ángulo queda determinado por las coordenadas (x, y).
De este modo definiremos las siguientes funciones:

Función Coseno (cos)

$$\cos : [0,2\pi] \to [-1,1]$$
$$\vartheta \;\to\; \cos(\vartheta)$$

Donde $\cos(\vartheta) \equiv x$, donde (x,y) es el punto determinado por el ángulo en la circunferencia unitaria.

Función Seno (cos)

$$sen : [0,2\pi] \to [-1,1]$$
$$\vartheta \;\to\; sen(\vartheta)$$

Donde $sen(\vartheta) \equiv y$, donde (x,y) es el punto determinado por el ángulo en la circunferencia unitaria.

De la definición anterior podemos obtener los siguientes valores:

$radián$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$seno$	0	1	0	-1	0
$\cos eno$	1	0	-1	0	1

Al observar la tabla podemos darnos cuenta que la función no es inyectiva. Ya que cuando graficamos algunos ángulos mayores de 360° se comienza a dibujar nuevamente la misma figura.

Definición Sea $f : B \subseteq IR \to IR$ se tiene que $f(x + p) = f(x)$, cuando sucede lo descrito, se dice que la función es periódica, de periodo p. Es decir, cada " p unidad de medida" la función vuelve a ser la misma.

Lo anterior tiene una estrecha relación con las funciones seno y coseno, debido que:

$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta + 2k\pi) \quad k \in Z \quad \text{y} \quad sen(\vartheta) = sen(\vartheta + 2k\pi) \quad k \in Z$$

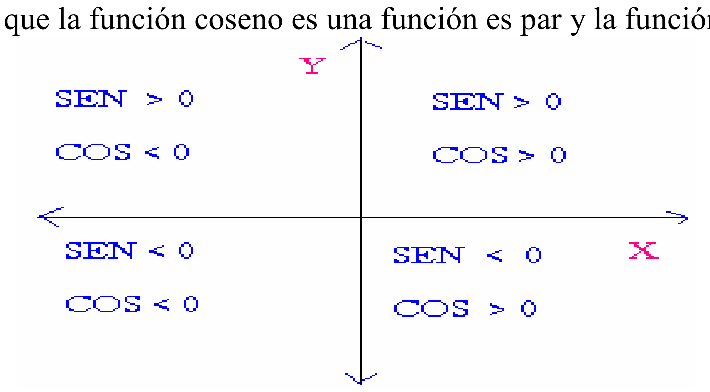
Volviendo a atrás habíamos definido $\cos(\vartheta) \equiv x$ y $sen(\vartheta) \equiv y$, como es par (x,y) pertenece a la circunferencia se tiene que :

$$sen^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) = 1 \quad \forall \vartheta \in IR$$

Además se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l} \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta) \\ sen(-\vartheta) = -sen(\vartheta) \end{array}\right. \quad \forall \vartheta \in IR$$

De lo anterior se deduce que la función coseno es una función es par y la función seno es impar.



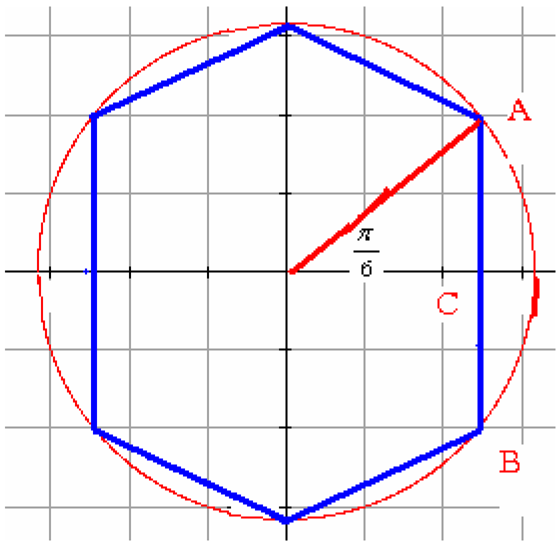
1.3 Relaciones en el triángulo rectángulo

Sabemos que $sen(\vartheta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ y $\cos(\vartheta)=\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$. A partir de esto podemos definir nuevas relaciones:

$tg(\vartheta)=\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	Tangente	$tg(\vartheta)=\dfrac{sen(\vartheta)}{\cos(\vartheta)}$
$ctg(\vartheta)=\dfrac{cateto\ adyacenteo}{cateto\ opuesto}$	Cotangente	$ctg(\vartheta)=\dfrac{\cos(\vartheta)}{sen(\vartheta)}$
$\sec(\vartheta)=\dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$	Secante	$\sec(\vartheta)=\dfrac{1}{\cos(\vartheta)}$
$\csc(\vartheta)=\dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	Cosecante	$\csc(\vartheta)=\dfrac{1}{sen(\vartheta)}$

Ejercicio

Calcular el valor de de $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$



Se tiene que el triángulo B0A es equilátero, por lo tanto $\overline{AB}=1$. Entonces $\overline{AC}=\dfrac{1}{2}$.

De ahí que $\overline{0C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

1.4 Propiedades Fundamentales:

1.4.1 Suma de ángulos

$$sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+sen(y)\cos(x)$$
$$sen(x-y)=sen(x)\cos(y)-sen(y)\cos(x)$$
$$\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-sen(x)sen(y)$$

$$\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+sen(x)sen(y)$$

Ejercicios
Demuestre las siguientes igualdades

1. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-sen(x)$	7. $sen\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=sen(x)$	8. $sen\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)$
3. $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$	9. $sen(\pi+x)=-sen(x)$
4. $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$	10. $sen(\pi-x)=sen(x)$
5. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=sen(x)$	11. $sen\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos(x)$
6. $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-sen(x)$	12. $sen\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos(x)$

Además calcule:

13. $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

14. Si $sen(38°)=z$ calcular $\dfrac{2sen(218°)+2\csc(322°)}{\csc(142°)+sen(128°)\cdot\csc(308°)}$

15. Si $sen(x)=\frac{3}{5}$ y $\cos(y)=\frac{12}{13}$ Calcular $\cos(x+y)$ y $sen(x-y)$

Ejercicios
Demuestre que $\forall x,y\in IR$ se tiene que.

1. $\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos(x)\cos(y)$
2. $\cos(x-y)-\cos(x+y)=2sen(x)sen(y)$
3. $sen(x+y)+sen(x-y)=2sen(x)\cos(y)$
4. $sen(x+y)-sen(x-y)=2\cos(x)sen(y)$
5. $sen(x)-sen(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$
6. $sen(x)+sen(y)=2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
7. $\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
8. $\cos(x)-\cos(y)=-2sen\left(\frac{x+y}{2}\right)sen\left(\frac{x-y}{2}\right)$

Además de la ecuación $sen^2(\vartheta)+\cos^2(\vartheta)=1$ podemos deducir

$$tg^2(x)+1=\sec^2(x) \quad \text{y} \quad ctg^2(x)+1=\csc^2(x)$$

1.4.2 Funciones del ángulo doble

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$
2. $sen(2x) = 2\cos(x) \cdot sen(x)$
3. $tg(2x) = \dfrac{2tg(x)}{1 - tg^2(x)}$
4. $ctg(2x) = \dfrac{ctg^2(x) - 1}{2ctg(x)}$

1.4.3 Funciones del ángulo medio

1. $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 + \cos(x)}{2}}$
2. $sen\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{2}}$
3. $tg\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$

Ejercicios

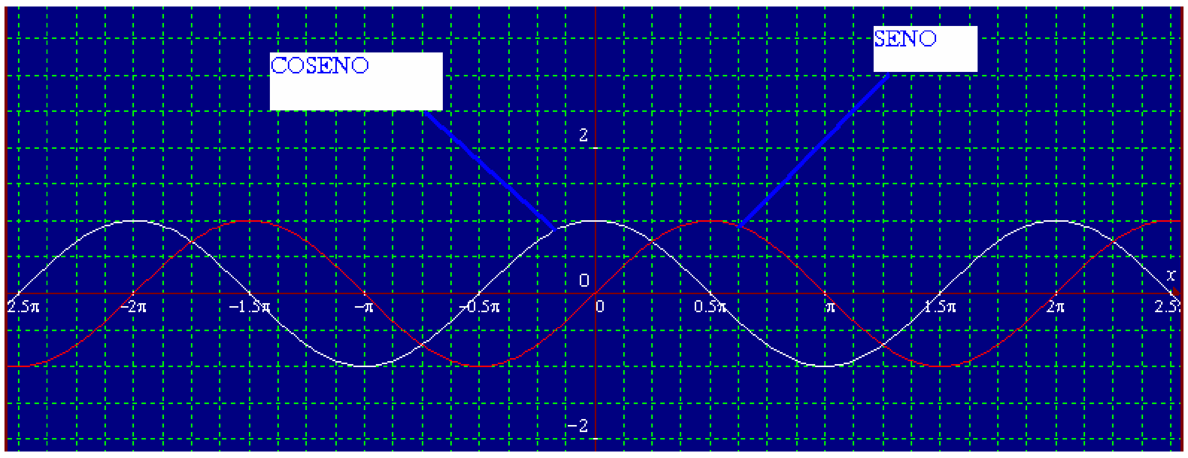
1. Demuestre las siguientes afirmaciones
   a. $\dfrac{tg(x) - sen(x)}{sen^3(x)} = \dfrac{\sec(x)}{1 + \cos(x)}$
   b. $(tg(x) + \sec(x))^2 = \dfrac{1 + sen(x)}{1 - sen(x)}$
   c. Si $3ctg(x) = 2$ entonces $\dfrac{10sen(x) - 6\cos(x)}{4sen(x) + 3\cos(x)}$
   d. Si $x + y = \dfrac{\pi}{3}$ entonces $\dfrac{sen(x) - sen(y)}{\cos(y) - \cos(x)} = \sqrt{3}$
   e. $\sec^6(x) - tg^6(x) = 1 + 3\sec^2(x)tg^2(x)$
   f. $\cos^8(x) - sen^8(x) = \dfrac{1}{2}\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\cos^3(2x)$
2. Calcular $sen(2x)$ sabiendo que $sen(x) - \cos(x) = \dfrac{1}{5}$
3. Transformar el siguiente producto en suma
   a. $\cos(7\lambda) \cdot sen(5\lambda)$
   b. $\cos(\lambda) \cdot sen(5\lambda)$
4. Si $x + y + z = \pi$ Demuestre que $sen(x) + sen(y) + sen(z) = 4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{z}{2}\right)$

1.5 Gráfica de las funciones Seno y Coseno

Para graficar primero debemos evaluar algunos valores. Además sabemos que el recorrido está en [-1, 1].

radián	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
grado	0	30	45	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0
$\cos eno$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Para realizar la gráfica basta saber los valores del primer cuadrante, ya que después debemos ocupar la información que la función es par e impar; además de ser una función periódica de periodo 2π

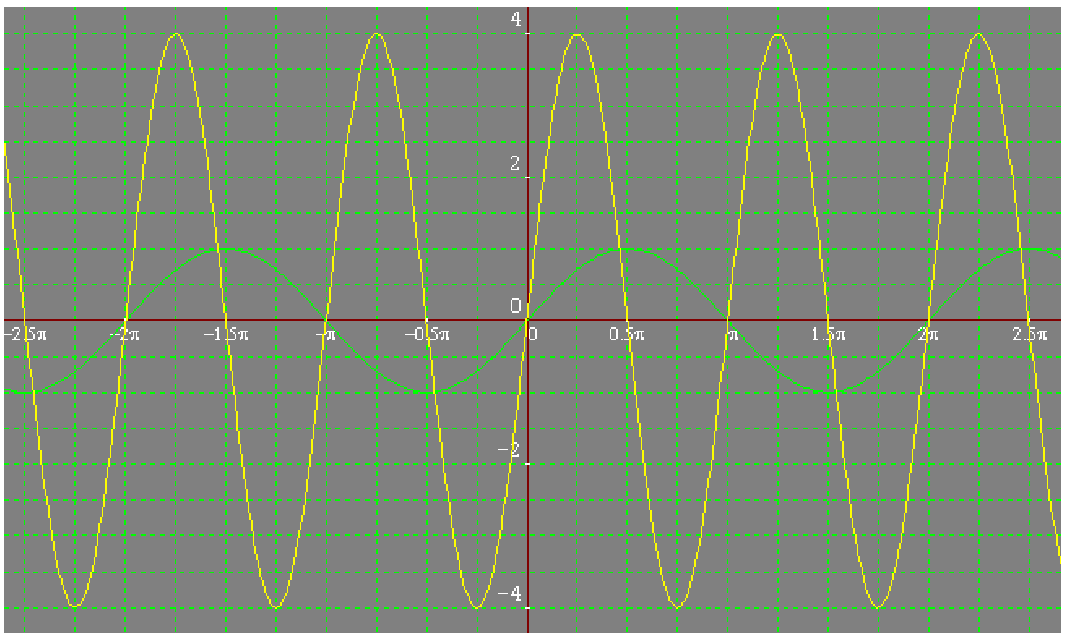


1.6 Función sinusoidal

Esta función es de la forma $f(x) = a \cdot sen(wx) + b \cdot \cos(wx)$

Definición Sea $f : A \subseteq IR \to IR$ una función periódica de periodo P. Si *f* tiene un valor máximo *s* y un valor mínimo *t*, entonces $\frac{s+t}{2}$ recibe el nombre de amplitud de la función.

Por ejemplo, la función seno y coseno tienen amplitud 1, debido que su recorrido es [-1,1]. Obviamente si modificamos estas funciones, modificamos tanto el periodo como la amplitud; Sea $f(\theta) = 4sen(2\theta)$, en este caso si observamos el periodo es π, esto quiere decir que cada π veces el gráfico se repite y la amplitud es 4.



Teorema Toda función de la forma $f(x)=Asen(\lambda x)$ ó $f(x)=A\cos(\lambda x)$ con $A,\lambda \in IR$ es una función sinusoidal de periodo $\frac{2\pi}{|\lambda|}$ y amplitud $|A|$.

Ejercicios

1. Grafique las siguientes funciones
   a. $f(x)=3sen(3x)$
   b. $f(x)=-2sen(-2x)$
   c. $f(x)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right)$

Observación En general la gráfica de $f(x)=\cos(x+k)$ se ha obtenido de la función $f(x)=\cos(x)$, siendo:

- Si $k>0$, la sinusoide $f(x)=\cos(x)$ se traslada k unidades hacia la izquierda,
- Si $k<0$, la sinusoide $f(x)=\cos(x)$ se traslada k unidades hacia la derecha.

En este caso si $f(x)=\cos(x+k)$ se denomina diferencia de fase al número $-k$.
Obviamente, sucede lo mismo con la función $f(x)=sen(x+k)$

En general, podemos decir que si la función sinusoidal tiene la forma $f(x)=A\cos(\lambda x+k)$ o $f(x)=Asen(\lambda x+k)$, donde $\lambda, A\in IR-\{0\}$ se tiene la siguiente información:

- Amplitud es $|A|$
- Periodo $\frac{2\pi}{|\lambda|}$
- Diferencia de fase $-\frac{k}{\lambda}$

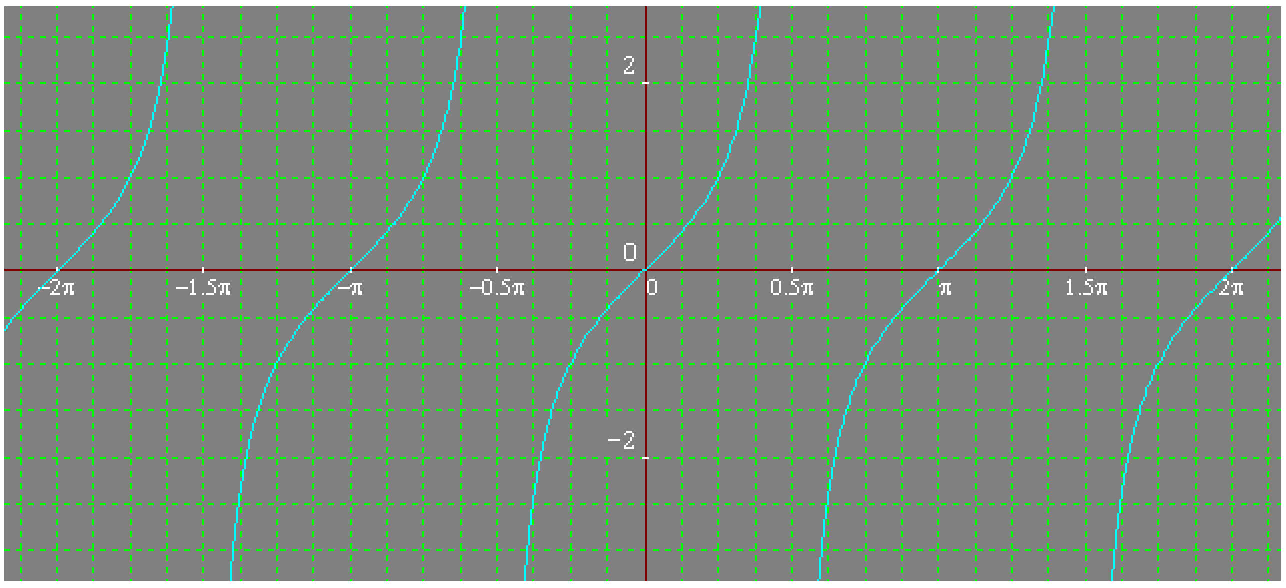
Ejercicio

Grafique las siguientes funciones trigonométricas

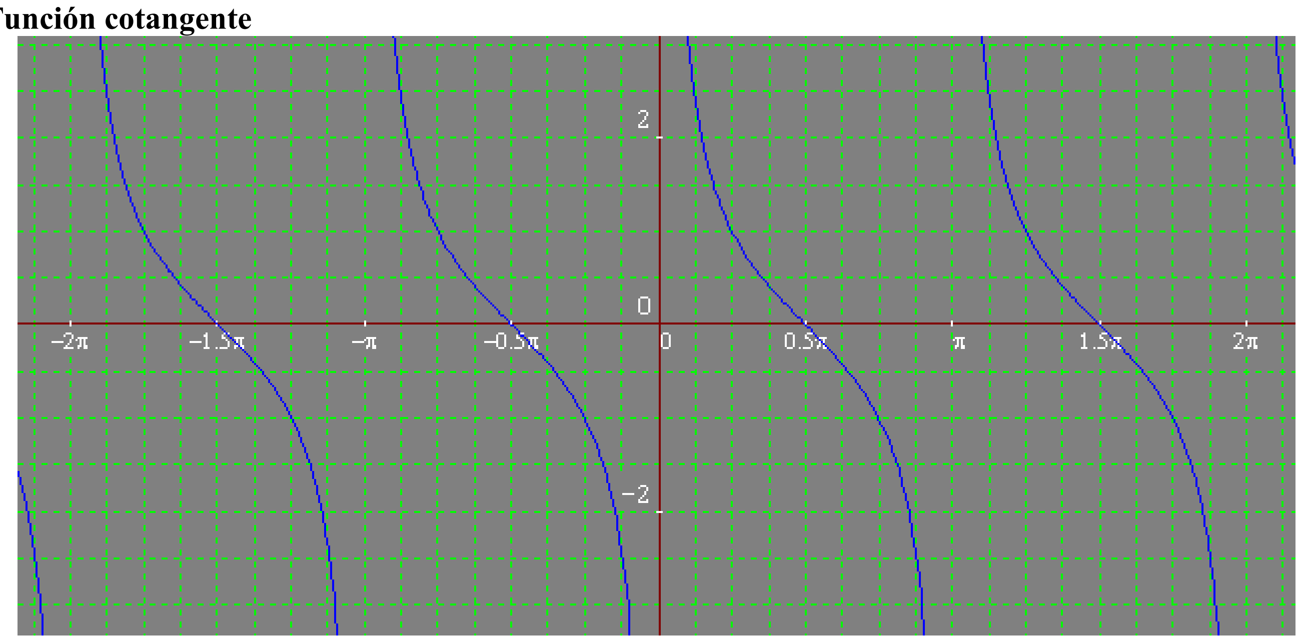
1. $f(x)=4sen\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$
2. $f(x)=5\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Al definir la función seno y coseno habíamos definida también otras funciones, que son las siguientes

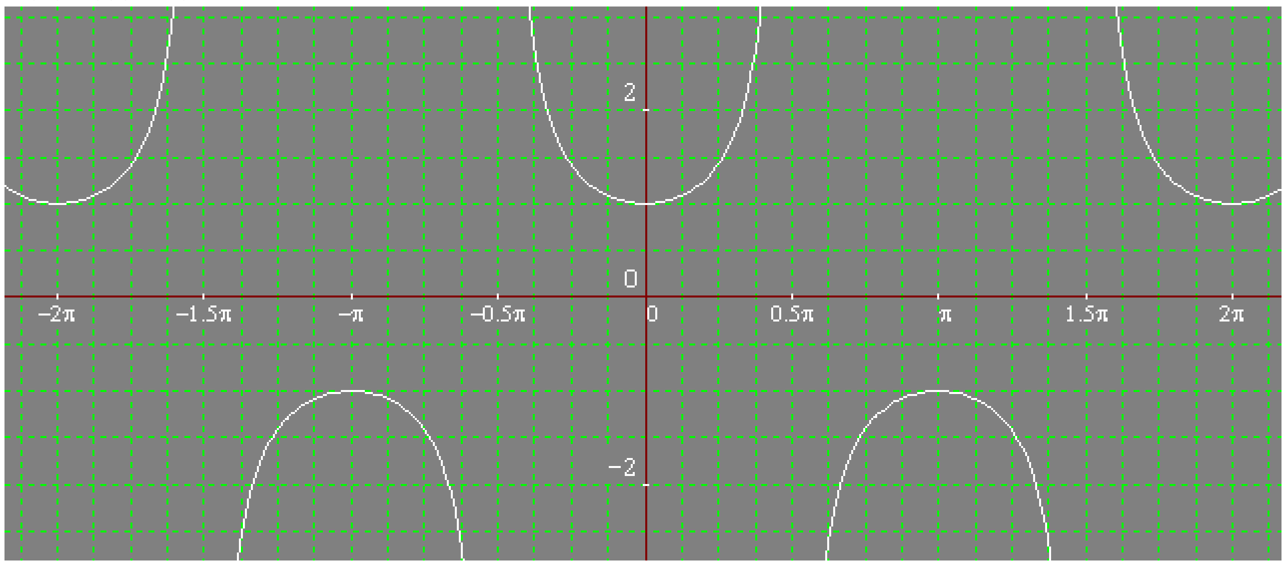
Función tangente



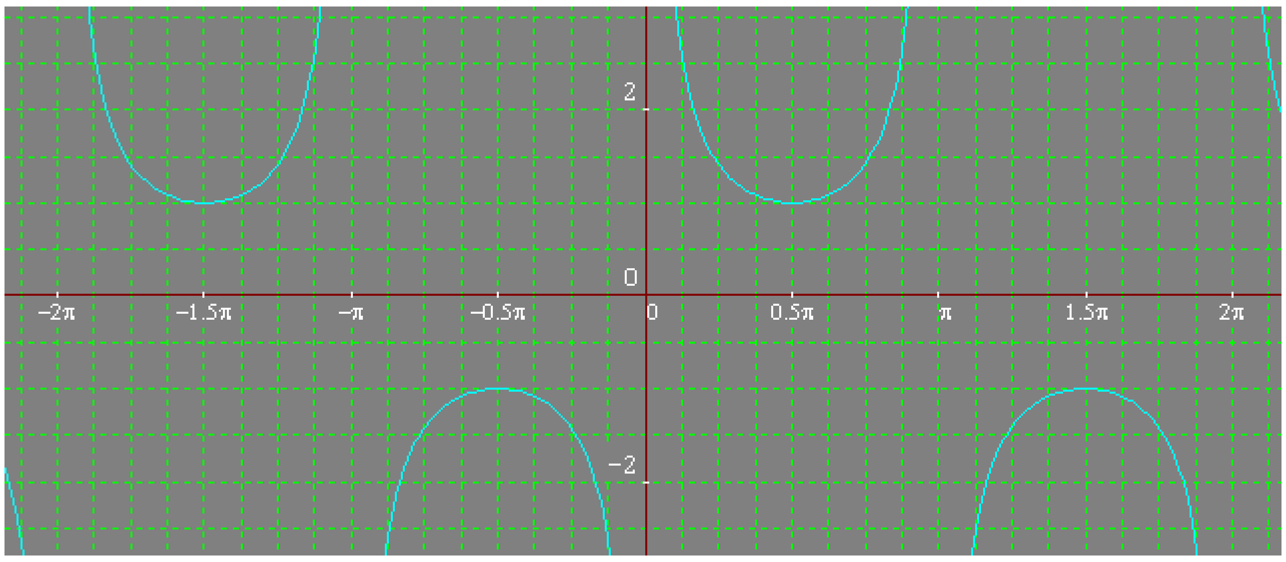
Función cotangente



Función secante



Función cosecante



Propiedades

$$tg(x \pm y) = \frac{tg(x) \pm tg(y)}{1 \mp tg(x) \cdot tg(y)}$$

$$ctg(x \pm y) = \frac{ctg(x) \cdot ctg(y) \mp 1}{ctg(y) \pm ctg(x)}$$

De lo anterior o bien de la gráfica de las funciones podemos deducir que:

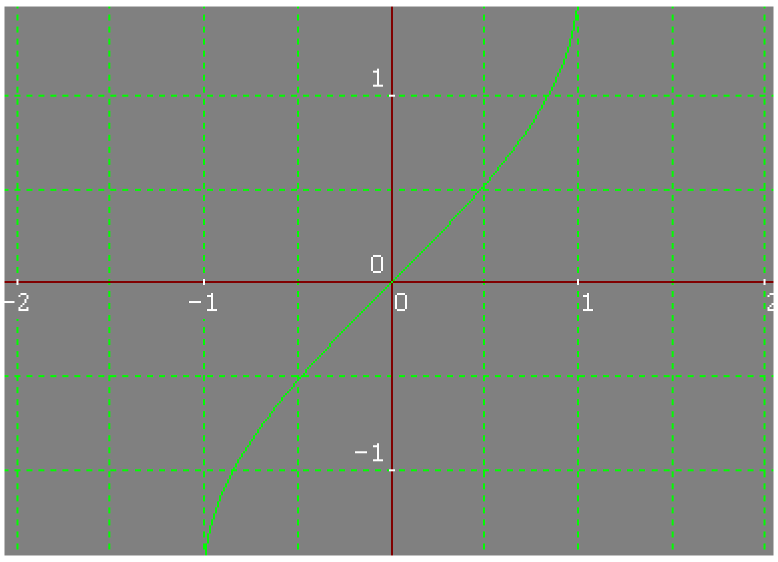
1. $tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -ctg(x)$
2. $tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ctg(x)$
3. $tg(\pi + x) = tg(x)$
4. $tg(\pi - x) = -tg(x)$
5. $tg\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -ctg(x)$
6. $tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = ctg(x)$

1.7 Funciones inversas

En el capitulo anterior, vimos que cuando una función es biyectiva, esta función tiene inversa. En el caso de las funciones trigonométricas, también existen funciones inversas. Eso si, tendremos que restringir los dominios de algunas funciones ya que no son inyectivas.

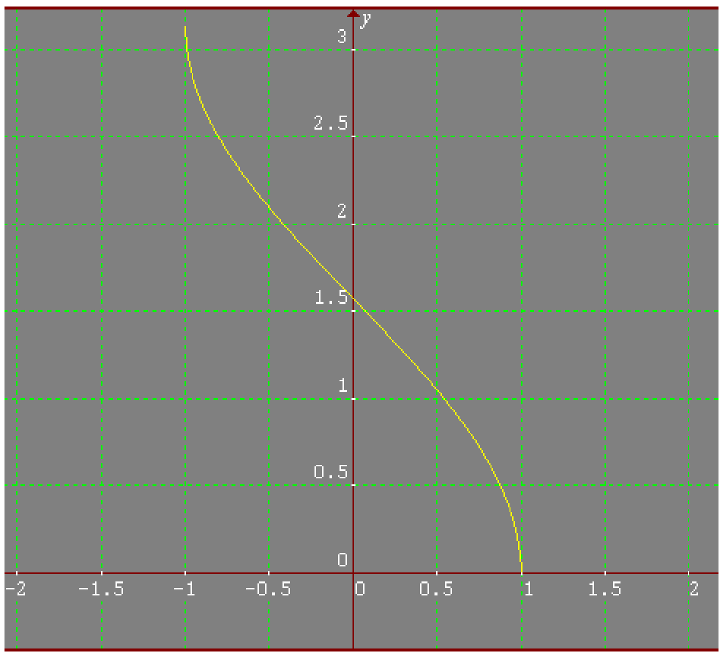
Función Arcoseno

Sea $\begin{array}{l} sen : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1] \\ \quad x \to sen(x) \end{array}$ se define $\begin{array}{l} sen^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \quad x \to sen^{-1}(x) = arcsen(x) \end{array}$



Función Arcocoseno

Sea $\begin{array}{l} \cos : [0,\pi] \to [-1,1] \\ \quad x \;\to\; \cos(x) \end{array}$ se define $\begin{array}{l} \cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi] \\ \quad x \;\to\; \cos^{-1}(x) = \arccos(x) \end{array}$



Ejercicios
Grafique las funciones inversas de tangente, cotangente, secante, cosecante. Obviamente, primero deben definir dominio de tal forma que la función sea inyectiva.

Observación

a. Se sabe que $f^{-1}(f(x)) = x$ y $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, entonces cada vez que se aplique la función inversa a la función trigonométrica nos quedará el ángulo y/o radián, según sea el caso.

b. $arcsen(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Ejercicios
1. Resolver los siguientes problemas de función inversa

a. $\arccos\left(2x^2-1\right)=2\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

b. $arcsen(x)+arcsen\left(\sqrt{3}x\right)=\frac{\pi}{2};0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

c. $sen\left(arcsen\left(\frac{5}{13}\right)+arcsen\left(\frac{4}{5}\right)\right)=\frac{63}{65}$

d. $arctg(2x)+arctg(x)=\frac{\pi}{4}$

1.8 Ecuaciones trigonométricas

Se denomina ecuación trigonométrica, a toda ecuación que contiene por lo menos, una función trigonométrica de un ángulo.
Al plantear estas ecuaciones existen varias formas:

1. Ecuaciones que contienen una sola función y un solo ángulo.
2. Ecuaciones en las que un factor es cero y el otro es factorizable.
3. Ecuaciones reducibles a una forma que se pueda resolver por factorización

Ejercicios
Resuelva las siguientes ecuaciones

a. $2\cos(2x)+\sqrt{3}=0$

b. $2\cos^2(x)-3\cos(x)=2$

c. $ctg(x)-tg(x)=1$

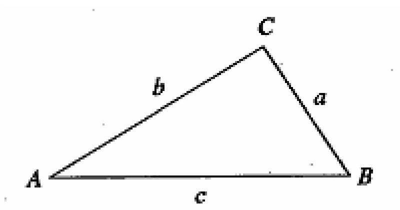
d. $ctg(x)-\cos(x)=sen(x)\cdot tg(x)$

e. $\cos(3x)+sen(3x)=\cos(x)+sen(x)$

1.9 Teorema del Seno y Coseno

Teorema del Seno
Se dice que en cualquier triángulo la razón de las longitudes de cualquier par de lados es igual a la razón de los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

En el triángulo ABC

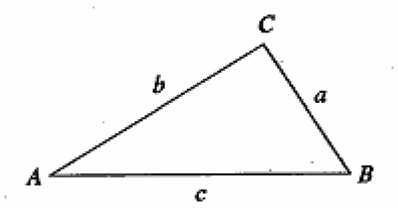


Tenemos

$$\frac{sen(A)}{a}=\frac{sen(B)}{b}=\frac{sen(C)}{c}$$

Teorema del Coseno
El teorema del Seno no se utiliza directamente para resolver triángulos si conocemos dos lados y el ángulo formado entre ellos, o si conocemos los tres lados. Para estos casos utilizaremos el teorema del coseno.

Del triángulo ABC



Se tienen las siguientes relaciones

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$$